

Connexió entre el 2D i el 3D... amb GeoGebra!

Bernat Ancochea Millet | Guillem Bonet Carbó

ACG (Associació Catalana de GeoGebra)

bancoche@xtec.cat | gbonet2@xtec.cat

Resum

El procés d'abstracció d'observar un desplegament pla i visualitzar la figura corresponent en 3D no és senzill, però es pot treballar amb diferents exercicis. En aquest article n'esmentarem uns quants. Parlarem d'activitats que poden ajudar a l'hora de treballar la visió espacial i d'establir la connexió entre un poliedre en l'espai i la seva descomposició en el pla. També ens proposem modelitzar, i després construir, alguns d'aquests desenvolupaments per connectar-los amb la seva figura original passant del 2D al 3D i viceversa.

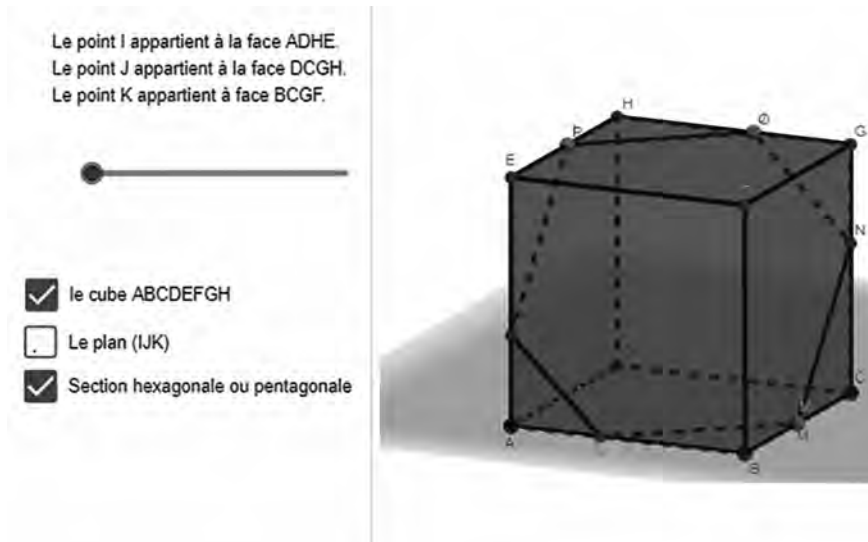
Abstract

The abstraction process of looking at a flat display and visualising the corresponding figure in 3D is not simple, but can be worked on with different exercises. In this article, we discuss some of them. We talk about other activities that can help with spatial vision and establishing the connection between a polyhedron in space and its decomposition on the flat plane. We also propose modelling and then building some of these developments to connect them with their original figure going from 2D to 3D and vice versa.

1. Introducció i alguns referents

El 27 de febrer de 2024 es va celebrar la XVI Jornada de l'Associació Catalana de GeoGebra (ACG). En aquesta jornada vam poder seguir experiències d'aula molt interessants en què el programa de geometria dinàmica hi té un paper important. En aquest sentit Jean Baptiste Étienne ha estat font d'inspiració per aquest article. En la seva exposició, el professor Étienne, que treballa al Lycée Français de Múrcia, va connectar d'una manera brillant el GeoGebra amb la manipulació directa fent servir paper i tisores a través d'un problema clàssic del currículum francès. En el seu treball descriu l'estudi de la dissecció d'un cub a través d'un pla oblic amb l'objectiu d'exercir la visió espacial i connectar els conceptes referents a la geometria del pla amb els de l'espai.

La idea proposada per Étienne (2024a) és prou simple: escollir tres punts sobre el cub i seccionar el cub fent servir el pla que passa per aquests punts. Però com es pot fer això? Proposa utilitzar un cub digital, creat amb GeoGebra, i tallar-lo amb el pla. Un cop fet, cal dissenyar els desplegaments plans de cadascuna de les dues seccions i muntar-los amb GeoGebra, és a dir, fer que el programa de geometria dinàmica converteixi el desplegament en un dels cossos 3D en què hem dividit el cub inicial. Alhora, es demana la comprovació amb paper i tisores, és a dir, es demana que l'alumne imprimeixi els dos desplegaments que ha fet amb GeoGebra al full de cartolina i que munti les dues peces, construint d'aquesta manera el cub inicial. Tot plegat una experiència molt bonica.



Imatge 1. Secció hexagonal d'un cub tallat per un pla. Construcció de J. B. Étienne (2024b).

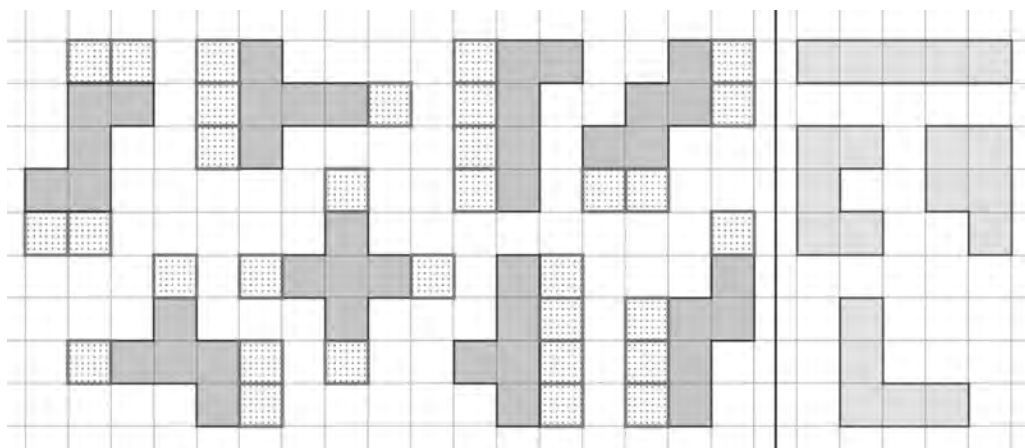
Aquestes idees ens van fer reflexionar sobre la nostra manera de treballar la geometria en l'espai. De ben segur que, remenant entre les diferents experiències que hem portat a l'aula, trobaríem activitats de manipulació interessants com ara la d'esbrinar quants cossos platònics hi ha, les característiques més significatives dels poliedres arquimedians, la construcció de prismes i piràmides i la relació que hi ha entre els volums, la descoberta de la fórmula d'Euler... Tot plegat un conjunt d'experiències prou memorables per ser emmarcades. Després de la reflexió vam començar a dissenyar-ne una de nova: la creació del desplegament pla d'un poliedre.

2. Desplegament pla d'un poliedre

Tothom, en l'adolescència, ha muntat poliedres a través del seu desplegament pla, convertint un esquema de dues dimensions en una figura en l'espai, tot plegat un procés màgic. Un cop n'hem construït uns quants es produeix un canvi de mirada en la persona que manipula els cossos; només veient el desenvolupament pla i abans de començar-lo a retallar, es comença a imaginar quin serà el cos que en resultarà. Aquest procés, que esdevé de manera inconscient, ens sembla fascinant.

Però el camí per treballar i adquirir el sentit espacial és llarg i no s'integra només muntant uns quants desenvolupaments plans. Cal treballar diferents aspectes dels poliedres en el pla i en l'espai per anar establint les bases de la connexió que pretenem crear.

Comencem el nostre camí amb una activitat introductòria del que vindrà després. Ens proposem fer una cerca exhaustiva i trobar tots els pentòminos possibles. És probable que ja haguem treballat aquesta activitat anteriorment, en aquest cas podríem passar la llista dels pentòminos directament. Per fer la cerca pot ser molt útil l'ús de materials, com ara els polígons que encaixen. Aquesta mena de materials també ens serà útil per ampliar l'activitat i preguntar-nos quins dels pentòminos trobats poden convertir-se en un cub sense tapa i, en aquest cas, la pregunta següent que ens ve al pensament seria on del desplegament hauríem de posar la tapa. Aquesta activitat, tot i que ja és molt coneguda, ens serveix per començar a introduir els desplegaments.

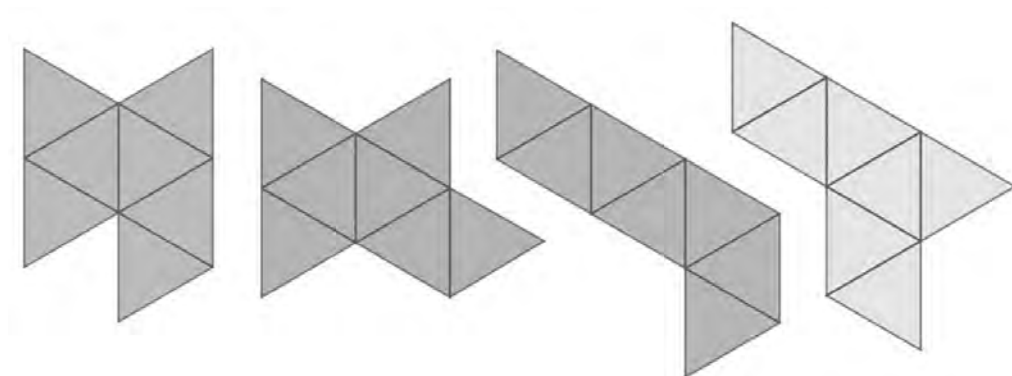


Imatge 2. Pentòminos convertibles a capsa amb proposta de tapa.

La proposta pot ser ampliada estudiant els poliamants (figures planes creades usant un nombre determinat de triangles equilàters). En aquest segon cas, el dels poliamants, costa copiar l'activitat que hem realitzat amb els poliòminos, vistos com a desplegaments de cubs, ja que amb triangles equilàters només podem crear dos poliedres regulars amb «pocs» triangles: el tetraedre, amb 4, i l'octaedre, amb 8.

L'estudi del primer cas, buscant quants triamants hi ha, és massa senzill, mentre que el del segon amb la cerca del nombre d'heptamants és massa complex. El que sí que podem fer és desfer el camí i partir ja del poliedre.

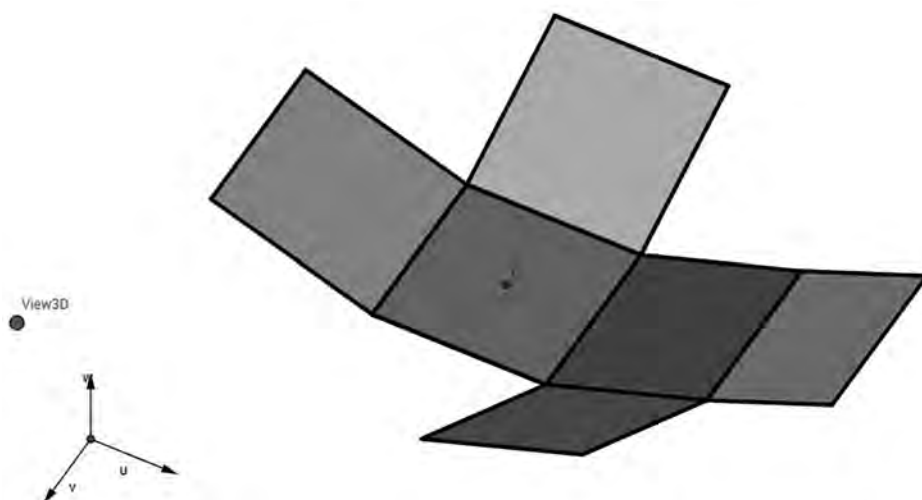
Aquí ens preguntem sobre el desplegament pla d'un octaedre (molt adequat per treballar amb materials); un cop trobat, eliminem un dels triangles de la vora i ens preguntem on més el podríem posar per aconseguir tancar l'octaedre. Per exemple, en la imatge següent, on posaríeu el vuitè triangle per obtenir el desplegament d'un octaedre? Quantes opcions hi ha en cada cas?



Imatge 3. Quatre heptamants. Desplegament d'un octaedre sense tapa.

Ja hem comentat que a l'hora d'esbrinar quins pentòminos es poden convertir en capsos sense tapa és important l'ús de material manipulable. L'ús de materials i viure el procés de muntatge ens permet gravar mentalment una seqüència de fotogrames que acaba connectant cada desplegament amb la seva figura final: el cub o, en aquest darrer cas, l'octaedre.

Un segon pas per enfortir aquesta connexió pot ser l'ús de materials creats digitalment, per exemple amb GeoGebra. El programa permet fer la visualització del plegament del cub (i d'altres poliedres) en la finestra 3D fent servir l'eina «Desplegament». Quan creem aquest desplegament se'ns genera un punt lliscant que ens permet muntar i desmuntar el cub de manera automàtica.

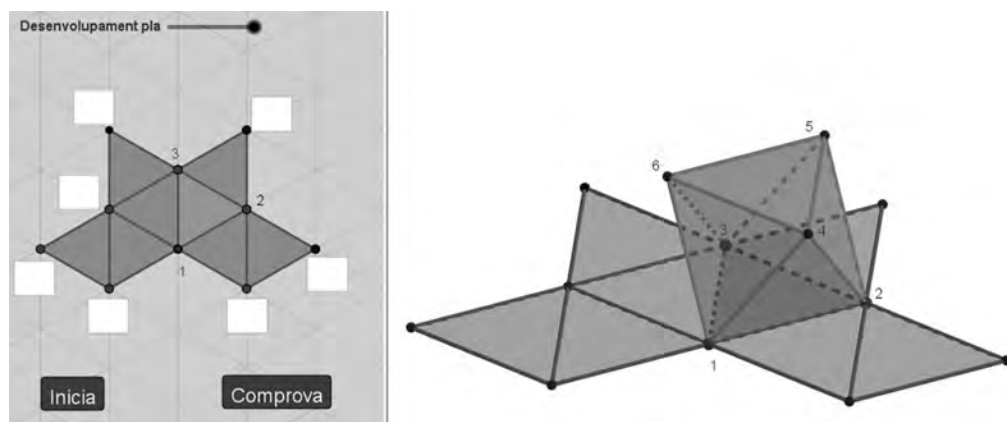


Imatge 4. Desenvolupament del cub. Construcció de D. Mentrard (2017).

Ara bé, el GeoGebra només ens ofereix un desplegament del cub. Què passa amb els altres? Ens proposem que els alumnes muntin el seu propi cub amb GeoGebra utilitzant qualsevol dels altres desplegaments trobats. Un cop creat el desplegament escollit a la finestra 2D fent servir els 6 quadrats que representaran les 6 cares del cub, aquest desplegament es visualitza a la finestra 3D de manera automàtica. Ara, la feina serà girar cadascuna de les cares per

construir el cub. Aquí treballarem el gir d'una cara al voltant d'un eix, amb l'eina «Rotació al voltant d'un eix» de la finestra 3D).

Una darrera activitat que ens agrada a l'hora de connectar el desplegament pla d'un poliedre amb la seva figura 3D és la de comprovar la fórmula d'Euler... Si ho fem directament sembla que no funciona, què passa? Efectivament, hi ha vèrtexs i arestes que es repeteixen. Com podem treballar i consolidar aquesta idea? La primera opció és analitzar diferents descomposicions d'un mateix poliedre: sempre queda desaparellat, el mateix nombre d'arestes i de vèrtexs? Quina relació tenen amb el poliedre?



Imatge 5. Activitat autocorrectiva per connectar vèrtexs d'un octaedre.

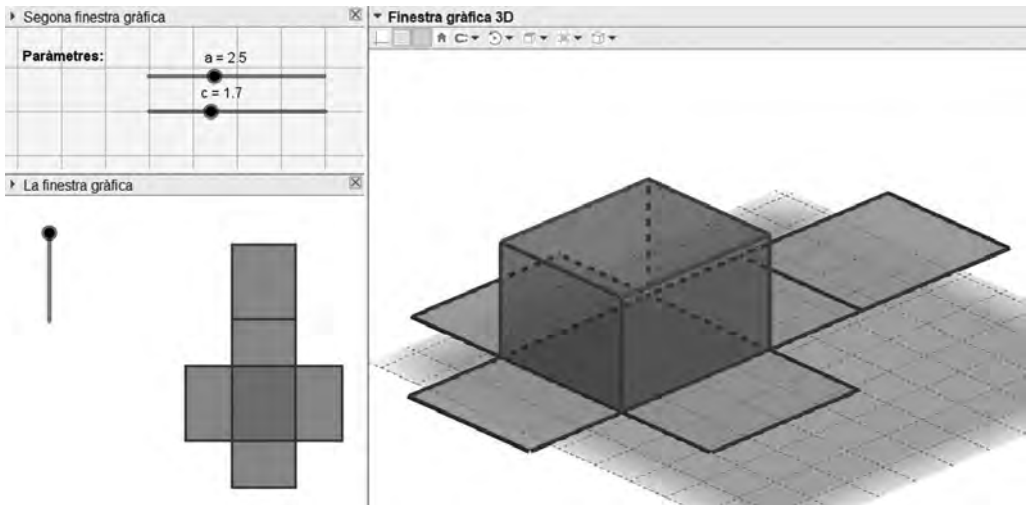
Una altra proposta és la de connectar arestes i vèrtexs que es corresponguin. Com veiem en la imatge 5, hem creat una aplicació autocorrectiva de GeoGebra que permet a l'usuari fer propostes de quins vèrtexs es repeteixen i on estan situats en el desplegament. Un cop fet, el programa mateix corregeix el procés i permet visualitzar a la finestra 3D la comprovació de la correcció plegant digitalment la figura.

3. Visualitzar, analitzar, modelitzar i construir... amb GeoGebra

En les activitats anteriors hem començat a familiaritzar-nos amb els cossos «senzills» connectant el seu desenvolupament amb la visió espacial del cos. El nostre objectiu ara és avançar en la investigació estudiant aquells cossos «menys senzills» que es deriven dels que ja hem estudiat.

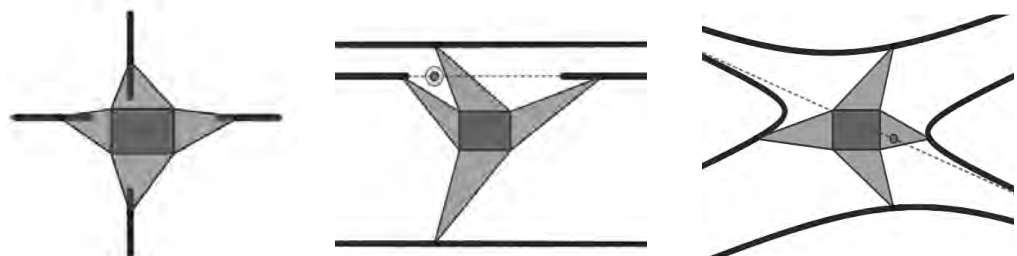
Amb aquest objectiu podem utilitzar algunes aplicacions creades amb GeoGebra per modificar mínimament la figura en 3D i detectar quins canvis s'han produït en el seu desenvolupament pla.

Així, per exemple, podem analitzar com varia el desenvolupament pla d'un ortoedre a mesura que en modifiquem l'alçada, o el desenvolupament pla d'una piràmide si en movem la «punta», fixant-nos especialment en quines característiques del desenvolupament canvien i quines no.



Imatge 6. Desenvolupament de l'ortoeidre.

En el cas de la piràmide rectangular també podem analitzar el traç dels punts associats al vèrtex en el desplegament. Així, si movem el vèrtex en direcció vertical, en quina direcció es desplaçaran els vèrtexs de la seva descomposició plana? Com es modificarà la figura? I si el movem en una direcció horitzontal en alçada i paral·lela a un costat? I si ho fem en una direcció horitzontal en alçada però no paral·lela a cap costat?

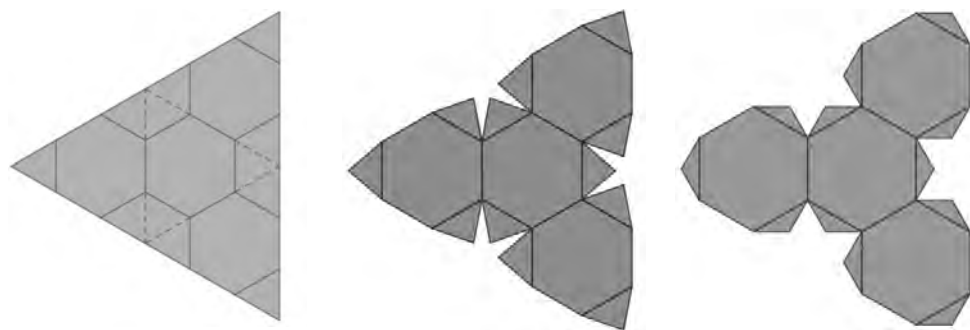


Imatge 7. Estudi de la posició dels vèrtexs d'una piràmide rectangular.

A la imatge 7 es mostra part d'aquest estudi, primer movent el vèrtex de manera perpendicular a la base. A les dues de la dreta, el vèrtex es mou sobre una línia, i en el cas central la línia és paral·lela a un dels costats de la base, al darrer no.

Podem complicar també l'anàlisi amb propostes de canvi més complexes, com ara la de truncar les puntes o les arestes del cub i veure què passa llavors amb el seu desenvolupament pla. L'ampliació d'aquesta activitat ens condueix a un estudi molt interessant sobre la variació del nombre de cares, arestes i vèrtexs, o sobre la forma de les cares.

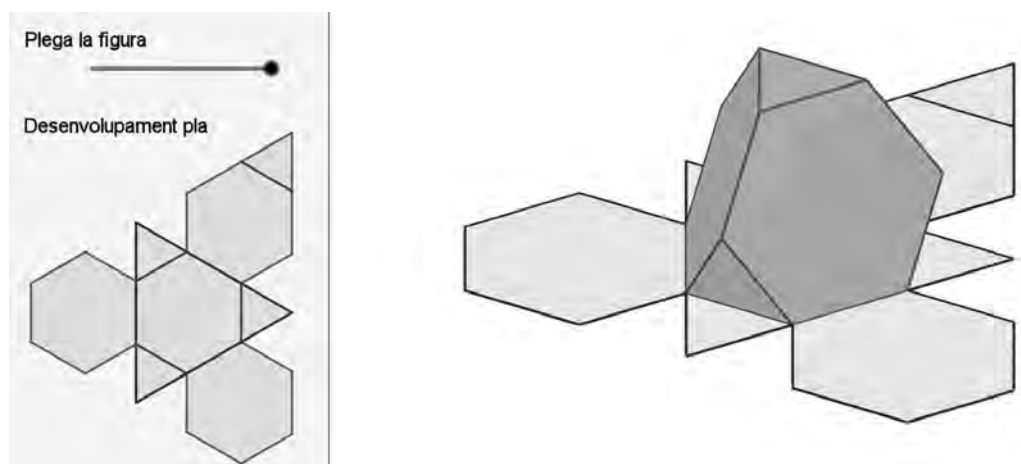
Per acabar aquest secció, un petit rept... Us proposem visualitzar quines figures donaran els següents desenvolupaments plans (alguns desplegaments admeten dues solucions diferents). Cal retallar també per la línia de punts.



Imatge 8. Exemples de tres desenvolupaments semblants.

Com a observació d'aquest petit exercici, els hexàgons són tots regulars i les alçades dels triangles isòsceles de la segona i tercera imatges mesuren, respectivament, $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de les alçades dels triangles equilàters de la primera.

Un cop ens hem familiaritzat prou amb els desenvolupaments plans de diferents figures podem anar més enllà i utilitzar el GeoGebra per dissenyar i crear una figura en 3D. Volem muntar un cos «senzill» a partir del seu desenvolupament pla d'una manera semblant a com ho hem fet amb el cub en l'apartat anterior. Per fer-ho és imprescindible que els alumnes estiguin familiaritzats amb les eines del programa.



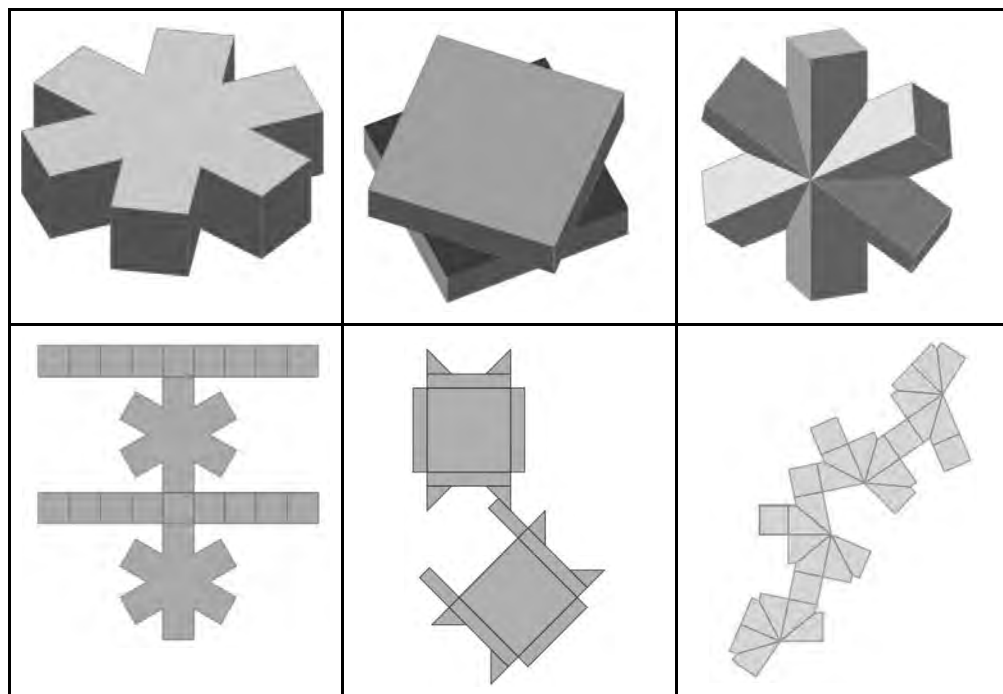
Imatge 9. Tetraedre truncat creat a partir del seu desenvolupament pla.

Amb aquesta activitat continuem en la línia de treballar la visualització de cossos en 3D i, en aquesta ocasió, ens fixem especialment en els angles en l'espai, ja que haurem de girar cares de la figura segons aquests angles.

La tasca requereix una certa habilitat i treballar amb girs, la qual cosa pot presentar dificultat de bon començament. Per això és aconsellable muntar primer el desplegament imprès en paper i estudiar-ne els diferents girs, les combinacions de moviments i els angles que hi intervenen, i després, crear l'aplicació. Els resultats que s'assoleixen acostumen a ser grans obres d'art.

4. Fer possible l'impossible

En aquesta última secció proposem crear el desenvolupament pla d'una figura en tres dimensions aparentment complicada entre algunes de proposades digitalment amb GeoGebra. L'activitat requereix l'ús de tot el que s'ha treballat anteriorment i ens serveix per tancar el cercle.



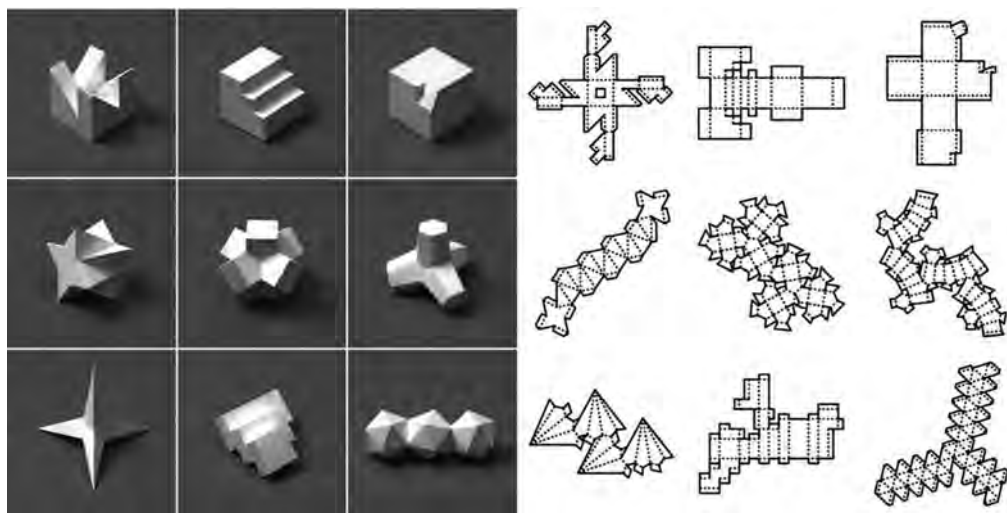
Imatge 10. Cossos de mostra amb els desenvolupaments plans respectius.

Tot i que la proposta és simple, el repte que hi ha al darrere és important: dissenyar el desenvolupament pla d'una figura «complicada» emprant algunes de les eines de la finestra 2D del GeoGebra. El nostre objectiu en aquesta ocasió és doble: d'una banda, treballar la visualització d'un cos 3D observant la relació entre cares, arestes i vèrtexs, i decidint quina és la distribució òptima per endreçar el desplegament. De l'altra, crear el desplegament en la finestra gràfica de GeoGebra —i aquí caldrà considerar la forma de les cares, les distàncies i els angles. Alhora, ens obrirà la possibilitat de fer servir eines bàsiques dels moviments del pla (translacions, simetries i girs) per anar construint el desplegament dissenyat.

Un cop feta la proposta de desplegament, la imprimirem en cartolina i la muntarem per comparar el resultat final amb la figura digitalitzada de l'inici. D'aquesta manera hi podrem detectar possibles errors i comprovar l'adequació del resultat final amb el cos esperat.

Agraïments

No volem acabar sense posar en relleu l'esforç titànic d'alguns alumnes a l'hora de realitzar aquestes activitats que, un cop acabades, veient el resultat final, aconsegueixen provocar-los un somriure de satisfacció.



Imatge 11. Desplegaments proposats per M. Motoyama a X. Foto: Riko Okaniwa.

També volem fer un reconeixement dels treballs de grans dissenyadors de materials de GeoGebra, com ara els de J. B. Étienne i la inestimable obra de Maho Motoyama, que ens té fascinats amb les seves propostes de desplegaments de figures aparentment impossibles.

Referències bibliogràfiques

- [1] Ancochea, B. i Bonet, G. (2024). «Desarrollos planos de figuras increíbles». <https://www.geogebra.org/m/a4ceuatv>. (Consultat 27/8/2024)
- [2] Ancochea, B. i Sorigué, I. (2017). «Cubos». <https://www.geogebra.org/m/VBjNpksu/>. (Consultat 12/8/2024)
- [3] Étienne, J. B. (2023). «Solides de l'espace». <https://www.geogebra.org/m/bxvsjmsq/>. (Consultat 12/8/2024)
- [4] Étienne, J. B. (2024a). «Desarrollos de los sólidos obtenidos (sección hexagonal regular)». <https://www.geogebra.org/material/show/id/yx8at5y8/>. (Consultat 12/8/2024)
- [5] Étienne, J. B. (2024b). «GeoGebra, papel y tijeras». <https://www.geogebra.org/m/h5srzccw>. (Consultat 12/8/2024)
- [6] Mentrard, D. (2017). «Les 11 patrons du cube». <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/HTML/Patroncubet.html>. (Consultat 12/8/2024)

.....